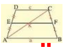
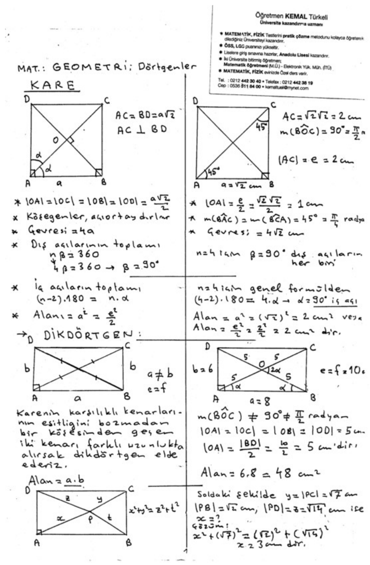


DÖTGENLERİN ÖNEMLİ ÖZELLİKLERİ

ve bu özellikleri anlaşılır kılmak

veya kavratmak için çözümlü sorular [tıklayınız]

yazan: Matematik Öğretmeni Kemal Türkeli kemal_turkeli@yahoo.com



Öğretmen KEMAL Türkeli
Üniversite kazandırma uzmanı

- MATEMATİK, FİZİK Testlerini pratik çözme metodunu kolayca öğretenek dilediğiniz Üniversiteyi kazandırır.
- ÖSS, LGS puanınızı yükseltir.
- Liselere giriş sınavına hazırlar, Anadolu Lisesi kazandırır.
- İki Üniversite bitirmiş öğretmen; Matematik öğretmeni (M.Ü.) - Elektronik Yük. Müh. (İTÜ)
- MATEMATİK, FİZİK evinizde Özel ders verir.

Tel. : 0212 442 30 40 • Telefax : 0212 442 38 19
Cep : 0536 511 84 00 • kemalturkeli@mynet.com

MAT.: GEOMETRİ; Dörtgenler

KARE

$AC = BD = a\sqrt{2}$
$AC \perp BD$

* $|OA| = |OC| = |OB| = |OD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
* Köşegenler, açıortaydırlar
* Çevresi $= 4a$
* Dış açılarının toplamı
  $n\beta = 360$
  $4\beta = 360 \rightarrow \beta = 90°$
* İç açıların toplamı
  $(n-2).180 = n.\alpha$
* Alanı $= a^2 = \frac{e^2}{2}$

$AC = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ cm
$m(B\hat{O}C) = 90° = \frac{\pi}{2}$ r
$|AC| = e = 2$ cm
$a = \sqrt{2}$ cm

* $|OA| = \frac{e}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1$ cm
* $m(B\hat{A}C) = m(B\hat{C}A) = 45° = \frac{\pi}{4}$ radya
* Çevresi $= 4\sqrt{2}$ cm

$n = 4$ için $\beta = 90°$ dış açıların her biri

$n = 4$ için genel formülden
$(4-2).180 = 4.\alpha \rightarrow \alpha = 90°$ iç açı
Alan $= a^2 = (\sqrt{2})^2 = 2\ cm^2$ veya
Alan $= \frac{e^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2\ cm^2$ dir.

DİKDÖRTGEN:

$a \neq b$
$e = f$

Karenin karşılıklı kenarlarının eşitliğini bozmadan bir köşesinden geçen iki kenarı farklı uzunlukta alırsak dikdörtgen elde ederiz.

Alan $= a.b$

$x^2 + y^2 = z^2 + t^2$

$b = 6$, $a = 8$, $e = f = 10$

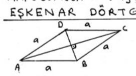
$m(B\hat{O}C) \neq 90° \neq \frac{\pi}{2}$ radyan
$|OA| = |OC| = |OB| = |OD| = 5$ cm
$|OA| = \frac{|BD|}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm'dir.

Alan $= 6.8 = 48\ cm^2$

Soldaki şekilde $y = |PC| = \sqrt{7}$ cm
$|PB| = \sqrt{2}$ cm, $|PD| = z = \sqrt{14}$ cm ise
$x = ?$
Çözüm:
$x^2 + (\sqrt{7})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{14})^2$
$x = 3$ cm dir.

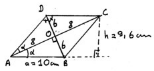
MAT: Geometri : Dörtgenler

EŞKENAR DÖRTGEN:



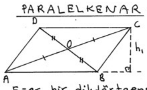
$m(\widehat{BAD}) = 90°$ olan karedir.
AC, BD köşegenleri açıortaydır.

* Alanı = a.h
$\boxed{\text{Alanı} = \frac{e.f}{2}}$
* Çevresi = 4a

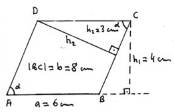


Alanı = 10. 9,6 = 96 cm^2
Alanı = $\frac{16.12}{2}$ = 96 cm^2
Çevresi = 4. 10 = 40 cm

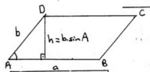
PARALELKENAR:



Eğer bir dikdörtgende açıların 90° olması koşulunu kaldırırsak paralelkenar elde edilir.
Alanı = a. h_1



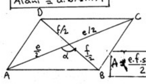
Alanı = 6.4 = 24 cm^2
Alanı = b. h_2 = 8.3 = 24 cm^2



$\boxed{\text{Alanı} = a.b.\sin A}$

b = 6 cm, m(A) = 30°, a = 10 cm } ise Alan = ?

Alanı = 10 . 6 . sin30 = 30 cm^2



$\boxed{A = \frac{e.f.\sin\alpha}{2}}$

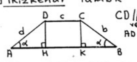
AC = 16 cm
BD = 12 cm
$m(\widehat{BAC}) = 150° = \frac{5\pi}{6}$ radyan } A = ?
Alan = $\frac{16.12}{2}$. sin150 = 48 cm^2'dir.

2 K.T.

Cep : 0536 511 84 00 • kemaltuel@mynet.com

YAMUK

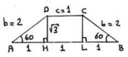
□ İkizkenar Yamuk



CD // AB ve AD = BC

|AB| = a, b = |BC| = |AD| = d, c = |CD|
* |AC| = |BD| → Köşegenleri eşittir.
* |AH| = |KB| = $\frac{a-c}{2}$
* Köşegenleri dikse
$\boxed{h = \frac{a+c}{2}}$

AB // CD ve |AD| = |BC| = 2cm



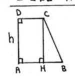
a = 3cm , b = d = 2 cm, c = 1 cm
|AC| = |BD| = $\sqrt{7}$ cm
|AH| = |LB| = $\frac{a-c}{2} = \frac{3-1}{2}$ = 1 cm
* AC ⊥ BD , a = $3\sqrt{2}$, c = $\sqrt{2}$, h = ?
h = $\frac{a+c}{2} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm

* İkizkenar yamuk teğetler dörtgeni ise

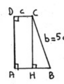
h = $\sqrt{a.c}$
h = 2r
a+c = 2b
Alan(ABCD) = 2br

a = |AB| = 8cm, c = |CD| = 2cm
b = |AD| = |BC| = ? , h = ? cm
h = $\sqrt{a.c} = \sqrt{8.2}$ = 4 cm
8 + 2 = 2b → b = 5cm
h = 2r = 4 → r = 2cm
Alan (ABCD) = 2.5.2 = 20 cm^2

□ DİK YAMUK



CD // AB
AD ⊥ AB
h = |AD| = |CH|
* AC ⊥ BD ise h = $\sqrt{ac}$

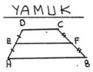


c = 2cm
b = 5 cm
a = |AB| = 5cm
|HB| = a − c = 5−2 = 3 cm
h^2 = a.c = 8.2 = 16 → h = 4cm

3

Cep : 0536 511 84 00 • kemaltuel@mynet.com

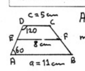
□ YAMUK



AB // CD

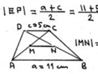
* Orta taban = |EF| = $\frac{a+c}{2}$
* Orta tabanın köşegenler arasında kalan parçası
|MN| = $\frac{a-c}{2}$
* Çevre = Ç = a+b+c+d
* $\boxed{\text{Alan(ABCD)} = \frac{a+c}{2}.h}$

Alan(ABCD) = |EF|. h



AB // CD
$m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180°$

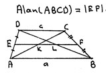
|EF| = $\frac{a+c}{2} = \frac{11+5}{2}$ = 8 cm



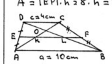
|MN| = $\frac{11-5}{2}$ = 3 cm

a = 11cm, c = 5cm, b = 10cm, d = 8cm.
Ç = ? Ç = 11+10+5+8 = 34 cm
A = $\frac{a+c}{2}$.h = $\frac{11+5}{2}$. 6 = 48 cm^2

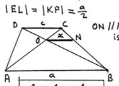
A = |EF|.h = 8. h = 8 . 6 = 48 cm^2



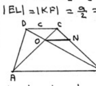
|EK| = |LF| = $\frac{c}{2}$
|EL| = |KF| = $\frac{a}{2}$



|EK| = |LF| = $\frac{c}{2} = \frac{4}{2}$ = 2 cm
|EL| = |KF| = $\frac{a}{2} = \frac{10}{2}$ = 5 cm

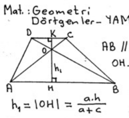


ON // AB // CD ise
$\boxed{\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$



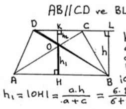
a = 8cm
c = 2 cm
AB // CD ise
|ON| = ?
$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ → x = 1,6 cm

Mat. : Geometri
Dörtgenler – YAMUK



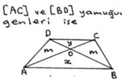
AB // CD
OH ⊥ AB
h_1 = |OH| = $\frac{a.h}{a+c}$
h_2 = |OK| = $\frac{c.h}{a+c}$

AB // CD ve BL ⊥ CD

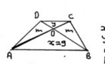


h = 8cm
a = 6 cm
c = 2 cm
h_1 = ?
|OK| = h_2 = ?
h_1 = |OH| = $\frac{a.h}{a+c} = \frac{6.8}{6+2}$ = 6 cm
h_2 = |OK| = $\frac{c.h}{a+c} = \frac{2.8}{6+2}$ = 2 cm

* [AC] ve [BD] yamuğun köşegenleri ise

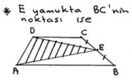


* $A(\overset{\triangle}{AOD}) = A(\overset{\triangle}{BOC}) = \sqrt{x.y}$
$\boxed{A(ABCD) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$



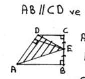
x = 9 cm^2
y = 4 cm^2
m = ?
A(ABCD) = ?
$A(\overset{\triangle}{AOD}) = A(\overset{\triangle}{BOC}) = \sqrt{9.4}$ = 6 cm^2
$A(ABCD) = (\sqrt{9} + \sqrt{4})^2$ = 25 cm^2

* E yamukta BC'nin orta noktası ise



$\boxed{A(\overset{\triangle}{AED}) = \frac{A(ABCD)}{2}}$

AB // CD ve |EC| = |EB|

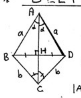


A(ABCD) = 14 cm^2
A(ADE) = ?
$A(\overset{\triangle}{AED}) = \frac{A(ABCD)}{2} = \frac{14}{2}$
$A(\overset{\triangle}{AED})$ = 7 cm^2'dir.

- 5 -

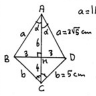
Tel. : 0212 442 30 40 • Telefax : 0212 442 38 19
Cep : 0536 511 84 00 • kemaltuel@mynet.com

* DELTOİT



$a = |AB| = |AD|$
$b = |BC| = |CD|$
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC})$
$|HB| = |HD|$
$|AC| = e, \quad |BD| = f$

* Köşegenleri birbirine diktir. $|AC| \perp |BD|$
* AC köşegeni A ve C açılarının açıortayıdır.
* Çevresi $= Ç = 2(a+b)$
* $\boxed{\text{Alanı} = \frac{e.f}{2}}$



$a = |AB| = |AD| = 3\sqrt{5}$
$b = 5cm = |BC| = |CD|$
$e = |AC| = 10cm$
$f = |BD| = 4cm$
$|HB| = |HD| = 3cm$
$|HA| = 6cm$, $|HC| = 4cm$

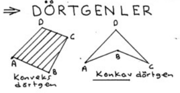
ABD ikizkenar üçgeninde AH kenarortayı aynı zamanda yükseklik olduğundan $AH \perp BD$'dir.

$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAD}) = \alpha$
$m(\widehat{BCH}) = m(\widehat{HCD}) = \beta$

$Ç = 2(3\sqrt{5}+5)$ cm

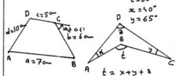
$\text{Alanı} = \frac{10.6}{2} = 30cm^2$

⇒ DÖRTGENLER



Konveks dörtgen

Konkav dörtgen



$z = 60°$
$x = 40°$
$y = 65°$
$t = x+y+z$
$t = 40+65+60$
$t = 165°$

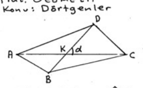
* Bir dörtgende iç açıların toplamı 360° dir.
* Dış açılarının toplamı 360° dir.
* $AC \perp BD$ ise $\boxed{A = \frac{e.f}{2}}$

$A+B+C+D = 360°$ veya
$A+B+C+D = (n-2)180 = (4-2)180 = 360$
$A'+B'+C'+D' = 360°$

Köşegenleri dikse ve $e = 8cm$, $f = 4cm$ ise $A = \frac{e.f}{2} = \frac{8.4}{2} = 16cm^2$

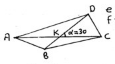
6 KT

Mat. Geometri
Konu: Dörtgenler



$e = |AC|$, $f = |BD|$, $m(\widehat{CKD}) = \alpha$ ise

$\boxed{A(ABCD) = \frac{1}{2}.e.f.\sin\alpha}$

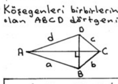


$e = |AC| = 8cm$
$f = |BD| = 4cm$
$m(\widehat{CKD}) = 30°$ ise
$A = ?$

$\sin 30 = \frac{1}{2}$

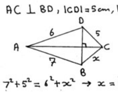
$A(ABCD) = \frac{1}{2}.e.f.\sin\alpha = \frac{8.4.\sin 30}{2} = 8cm$

* Köşegenleri birbirlerine dik olan ABCD dörtgeninde

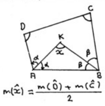


$\boxed{a^2+c^2 = b^2+d^2}$

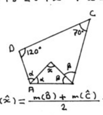
$AC \perp BD$, $|CD| = 5cm$, $|AD| = 6cm$, $|AB| = 7cm$



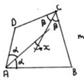
$7^2+5^2 = 6^2+x^2 \rightarrow x = \sqrt{38}$ cm



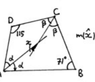
$m(\hat{x}) = \frac{m(\hat{D}) + m(\hat{C})}{2}$



$m(\hat{x}) = \frac{m(\hat{D}) + m(\hat{C})}{2} = \frac{120+70}{2} = 95$



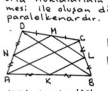
$m(\hat{x}) = \frac{|m(\hat{D}) - m(\hat{B})|}{2}$



$m(\hat{x}) = \frac{115-71}{2} = 22°$

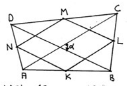
-7-

* Bir dörtgenin kenarlarının orta noktalarının birleştirilmesi ile oluşan dörtgen paralelkenardır.



MN // AC
KL // AC
ve
$|KL| = |MN| = \frac{|AC|}{2}$ dir.

* KN // ML // BD ve $|NK| = |ML| = \frac{|BD|}{2}$
* Çevre(KLMN) $= |AC| + |BD|$
* Özel durumlar:
  → $|AC| = |BD|$ ise KLMN eşkenar dörtgen olur.
  $AC \perp BD$ ise KLMN dikdörtgendir.



$|AC| = 18cm$, $|BD| = 12cm$

$|KL| = |MN| = \frac{|AC|}{2} = \frac{18}{2} = 9$ cm

$|NK| = |ML| = \frac{|BD|}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm

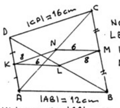
Çevre $= 18+12 = 30$ cm

$|AC| = |BD| = 10$ cm ise KLMN kenarları 5cm olan eşkenar dörtgendir.
$MN \perp NK$ olacağından KLMN dikdörtgendir.

* Bir dörtgenin, karşılıklı iki kenarının orta noktaları ile köşegenlerinin orta noktalarının birleştirilmesi ile oluşan dörtgen paralelkenardır.

ACD üçgeninde, KN // CD dir.
DBC " LM // CD dir.
Şekildeki;
ABD üçgeninde KL // AB
ACB " NM // AB dır.

* $\boxed{\text{Çevre(KLMN)} = |AB| + |CD|}$



NC = NA
LB = LD
KA = KD
MB = MC

$|KL| = |NM| = \frac{|AB|}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm
$|KN| = |LM| = \frac{|CD|}{2} = \frac{16}{2} = 8$ cm

Çevre (KLMN) $= 12+16 = 28$ cm

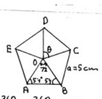
-8- K.T.

Mat. : Geometri

Düzgün BEŞGEN

$a = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA|$

* n=5 kenarlı düzgün çokgenin α iç açısı
  $n\alpha = (n-2)180 = 5\alpha$
* β dış açısı ise n=5 için
  $n\beta = 360$
* $\boxed{\text{Köşegen sayısı} = \frac{n(n-3)}{2}}$



$\theta = \frac{360}{n} = \frac{360}{5} = 72° = m(\widehat{AOB})$
$a = 5cm$

$5\alpha = (5-2)180 \rightarrow \alpha = 108° = 3\frac{\pi}{5}$ radyan

$5\beta = 360 \rightarrow \beta = 72° = 2\frac{\pi}{5}$ radyan

n=5 için Köşegen sayısı $= \frac{5.2}{2} = 5$

* Düzgün beşgenin köşeleri $|OA| = R$ yarıçaplı çember üzerindedir.
* Düzgün beşgenin kenarları $r = |OH|$ yarıçaplı çembere teğettirler.
* $\text{Alanı} = \frac{n.r.a}{2} = \frac{5ra}{2} \simeq 1{,}72a^2$
  $\text{Alan} \simeq \frac{25}{4}.r^2$
* $\boxed{\text{Alanı} = \frac{n.R^2.\sin 72°}{2}}$, n=5 için

$\sin 72° = 0{,}951$
$|OA| = R$
$|OH| = r$
$R = 12{,}36$ cm
$r = 10$ cm
$a = 14{,}54$ cm

$\text{Alanı} = \frac{5.10.14{,}54}{2} = 363{,}5cm^2$

$\text{Alanı} = \frac{5.(12{,}36)^2.\sin 72°}{2} = 363{,}5cm^2$

* Çevresi $= na = 5a$

Çevresi $= 5.14{,}54 = 72{,}7$cm

D -9-

Düzgün ALTIGEN

Altı kenarı ve iç açıları eş olan dışbükey çokgene düzgün altıgen denir.

$n=6$ kenarlı düzgün çokgenin α iç açısı
$n\alpha = (n-2).180$

Düzgün altıgenin β dış açısı
$n\beta = 360$

Köşegen sayısı $= \frac{n(n-3)}{2}$

Düzgün altıgenin köşeleri $|OA| = R = a$ yarıçaplı çember üzerindedir.

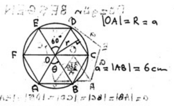
İç teğet çemberinin yarıçapı r dir. $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Alanı $= \frac{n.a.r}{2} = 3ar = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

Alanı $= \frac{nR^2 \sin 60}{2} = 3R^2 \sin 60$

Çevresi $= na = 6a$

$a = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF|$



$|OA| = R = a$

$a = |AB| = 6cm$

$6\alpha = (6-2)180 \rightarrow \alpha = 120° = 2\frac{\pi}{3}$ radyan

$6\beta = 360 \rightarrow \beta = 60° = \frac{\pi}{3}$ radyan

Köşegen sayısı $= \frac{6(6-3)}{2} = 9$

$R = a = 6cm = |OA| = |AB|$ Çevrel çemberin yarıçapıdır.

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm

r; APOTEMİ doğrusudur.

Alanı $= 3.6.3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$ cm²

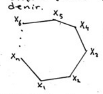
Alanı $= 3.6^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$ cm²

Çevresi $= 6.6 = 36$cm

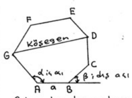
Mat.: Geometri

→ ÇOKGENLER:

Düzlemde, herhangi üçü doğrusal olmıyan n tane ($3 \leq n$) noktanın ikişer ikişer ardışık olarak bir kapalı bölge oluşturacak şekilde birleştirilmesiyle oluşan şekle çokgen denir.



$3 \leq n$



Çokgenler kenarlarının sayısına göre adlandırılırlar. Dörtgen, beşgen, altıgen gibi.

[AB], [BC] ... doğru parçalarına çokgenin kenarları denir.

* Dışbükey çokgenlerde iç açıların toplamı
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)180 = (n-2).\pi$ Radyan

$n=11$ kenarlı bir çokgenin iç açılarının toplamı
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (11-2)180 = 1620° = 9\pi$ radyan

* n kenarlı konveks bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı
$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 360° = 2\pi$ Radyan

$n=11$ kenarlı bir çokgenin dış açılarının toplamı kenar sayısına bağlı değildir.
$\sum_{i=1}^{11} \beta_i = 360°$

* Aynı köşeye ait bir iç açı ile bir dış açı birbirinin bütünleridir.

$\alpha_1 + \beta_1 = 180°$
$\alpha_2 + \beta_2 = 180°$

* Bütün köşegenlerinin sayısı
$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

$n=11$ için onbirgenin köşegen sayısı $? = \frac{11.(11-3)}{2} = \frac{11.8}{2} = 44$

* İç açılarının en az n-3 tanesi geniş açıdır. (Kare, dikdörtgen hariç)

$n=11$ ise
$n-3 = 11-3 = 8$ iç açısı en az geniş açıdır.

11

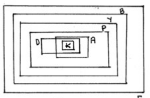
n kenarlı bir konveks çokgenin belirlenebilmesi (çizilebilmesi) için en az $2n-3$ tane bağımsız elemanının bilinmesi gerekir.
Bu $2n-3$ elemanın en az $n-2$ tanesi uzunluk ve en çok $n-1$ tanesi açı olmalıdır.
$2n-3 = (n-2) + (n-1)$

Örneğin $n=5$ kenarlı bir konveks çokgenin çizilebilmesi için en az $2n-3 = 2.5-3 = 7$ bağımsız elemanının bilinmesi gerekir. Bu 7 elemanın en az $n-2 = 5-2 = 3$ tanesi uzunluk olmalıdır. Bu durumda en çok $7-3=4$ tanesi açı olabilir.
$7 = 4$(uzunluk) $+ 3$ (açı)

* Bir köşesinden geçen köşegen sayısı n-3 tanedir.

$n=5$ kenarlı bir çokgenin bir köşesinden geçen köşegen sayısı $n-3 = 5-3 = 2$ tanedir.

Wenn şeması ile çokgenler ve dörtgenlerden oluşan kümeler arasındaki ilişkiyi şöyle açıklayabiliriz.



K C A C P C Y C E
A C P
K C D

K; Kareler kümesi
A: Eşkenar dörtgenler kümesi
D: Dikdörtgenler kümesi
P: Paralelkenarlar kümesi
Y: Yamuk kümesi
B\Y: Deltoit veya genel dörtgenler
B: Dörtgenler kümesi
E−B = B'; Çokgenler kümesi
E; Çokgenler kümesi

Öğretmen KEMAL Türkeli
Üniversite kazandırma uzmanı